MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

REITORIA

Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES

27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAL Nº 03 / 2014

Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

ÍNDICE DE INSCRIÇÃO	337
CAMPUS	Alegre
ÁREA/SUBÁREA/ESPECIALIDADE	Matemática

PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS | DISCURSIVA
MATRIZ DE CORREÇÃO

QUESTÃO 01

$\mu = 21mm$

$\sigma = 1,5\ mm$

$P(X > 23) = P(Z > 1,33) = 0,5 - P(0 < Z < 1,33)$

$P(X > 23) = 0,5 - 0,4082 = 0,0918$

$p1 = 0,6918 - 00918 = 0,6$

$$p = \frac{p1}{12} = \frac{0,6}{12} = 0,05$$

a) $n = 20$

$p = 0,05$

$q = 0,95$

$P(X \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$

$P(X \leq 2) = C_{20,0}(0,05)^0(0,95)^{20} + C_{20,1}(0,05)^1(0,95)^{19} + C_{20,2}(0,05)^2(0,95)^{18}$

$P(X \leq 2) = 0,3585 + 0,3774 + 0,0887$

$P(X \leq 2) = 0,9246$

b)

$E(X) = n.p = 80.0,05 = 4$

Espera-se que 4 cabos sejam defeituosos

c)Amostra

$n = 40, \quad \hat{p}_0 = \frac{5}{40}, \quad \hat{q}_0 = \frac{35}{40} \qquad \alpha = 5\%$

$H_0 = 0,04$

$H_1 > 0,04$

$Zcal = \frac{\hat{p}_0 - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}_0 \cdot \hat{q}_0}{n}}} = \frac{0,1250 - 0,04}{\sqrt{\frac{0,1250.0,875}{40}}}$ = 1,6255

$Z_{5\%} = 1,65$

$Zcal < Z$ não rejeita a hipótese H_0

OBS: A questão também pode ser feita utilizando o teste de t

d) $e = 0,03; \alpha = 5\%, \; Z_{5\%} = 1,65$

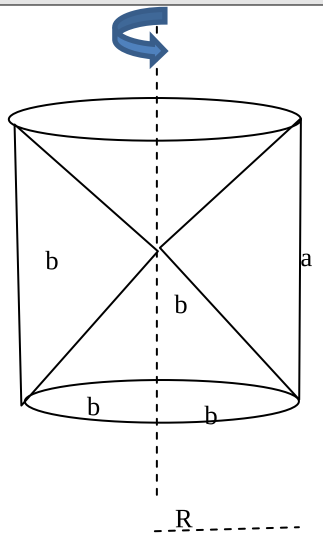
$n = \left(\frac{z_\alpha}{e}\right)^2 \hat{p}\,\hat{q}$

$n = \frac{1,96^2}{0,03^2} 0,1250.0,8750$

$n = 466,86$

Logo $n \geq 467$. Portanto a amostra não é suficiente.

QUESTÃO 02



a: hipotenusa do triangulo

b: catetos

Vs: Volume do sólido

Vc: volume do cilindro

Vco: Volume do cone

Ve: volume da esfera

Vs=Vc-2Vco

a=2R

$$Vs = \pi R^2 a - \frac{2}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^2 a$$

$$Vs = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}R^3$$

$$Vs = \frac{4}{3}\pi R^3$$

No caso especifico temos que $R = \frac{a}{2}$

$Ve = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$ logo: Vs=Ve

b) Ss: Superfície do sólido

Se: superfície da esfera

Observe que: $a = 2R$ e $b = R\sqrt{2}$

$$\frac{Ss}{Se} = \frac{2\pi Ra + 2.2\pi Rb}{4\pi R^2} = \frac{2\pi R(a + 2b)}{4\pi R^2} = \frac{(a + 2b)}{2R}$$

$$\frac{Ss}{Se} = \frac{2R + 2R\sqrt{2}}{2R} = 1 + \sqrt{2}$$

QUESTÃO 03

a) Note que no intervalo $(-\infty, 2)$ a função é contínua pois f(x) = -x+2 é uma função polinomial.

No ponto x=-2, f é contínua, pois:

i) f(-2) está definida

ii) existe o $\lim_{x \to -2} f(x)$ existe, uma vez que

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -x + 2 = 4$ e

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 2^{-x}$ = 4

iii) $\lim_{x \to -2} f(x)$=f(-2)=4

No intervalo (-2,π), f é contínua pois i) $f(x) = 2^{-x}$ está definida neste intervalo; ii) existe $\lim_{x \to c} 2^{-x}$, *para todo número real* $c \in (-2, \pi)$ e iii) $\lim_{x \to c} 2^{-x}$=2^{-c}=f(-c).

b) Considerando o item anterior, já demonstramos que a função é contínua no intervalo

(-∞, π).

Note que no intervalo ($\pi, +\infty$), $f(x) = M + \cos(x + \frac{\pi}{2})$ é contínua para todo número real

c $\in$ (π, +∞) pois i) f está definida para todo c; ii) existe o $\lim_{x \to c} f(x)$ e iii) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} M + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = M + \cos\left(c + \frac{\pi}{2}\right) = f(c)$.

Devemos estudar então a continuidade no ponto $x = \pi$.

Para que f seja contínua em $x = \pi$, os limites laterais no ponto devem existir e serem iguais:

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} 2^{-x} = 2^{-\pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} M + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = M + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = M$$

Portanto, M=$2^{-\pi}$.

QUESTÃO 04

Note que T (x,y) = T [(x,0)+(0,y)] = T [x(1,0)+y(0,1)].

Como a transformação é linear, vale dizer então que:

T (x,y) = x ·T(1,0) + y ·T(0,1)   (I)

Devemos encontrar T(1,0) e T(0,1) e substituir na expressão em (I).

Interpretando a matriz, temos:

T(1,0) = 1·(2,1) + (-1)·(0,-1) = (2,2)

T(0,1) = -1·(2,1) + 0·(0,-1) = (-2,-1)

Substituindo na expressão em (I), temos:

T(x,y) = x·(2,2)+y·(-2,-1) = > T(x,y) = (2x-2y,2x-y).

QUESTÃO 05

Resolução do item (a)

Construção do SEN e a solução de quadrados mínimos:

A solução algébrica é como segue:

Como o gráfico exibe uma reta de mínimos quadrados ajustada aos dados, o modelo teórico

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

é o adequado.

Os resíduos de deste modelo podem ser encontrados da seguinte forma

$\varepsilon = Y - \beta_0 - \beta_1 X.$

E devemos minimizar a soma de seus quadrados $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$. Isto é:

$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$, onde n é o tamanho da amostra.

Assim, o mínimo pode ser obtido por cálculo derivando S em relação aos parâmetros β_0 e β_1. Então,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_0 X_i) \\ \dfrac{\partial s}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_0 X_i) X_i \end{cases}$$

Igualando essas derivadas a zero e substituindo β_0 e β_1 pelos estimados b e a, respectivamente, tem-se o sistema de equações normais (SEN).

$$\begin{cases} -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b - aX_i) = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b - aX_i) X_i = 0 \end{cases}$$

Agora, resolvendo (SEN) em relação aos estimadores individualmente:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - nb - a \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - b \sum_{i=1}^{n} X_i - a \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(SEN)}$$

Ou

$$\begin{cases} nb + a\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ b\sum_{i=1}^{n} X_i + a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{cases} \quad (1)$$

Assim, a partir do SEM, obtém-se as fórmulas para o cálculo do valor de a e b, conforme segue:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - a\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{Y} - a\bar{X} \quad (2)$$

Onde $\bar{Y}$ e $\bar{X}$ são as respectivas médias de X e Y.

O valor de a é dado por:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}} = \frac{SPXY}{SQX}$$

Em que $SPXY = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n}$ e $SQX = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}$, sendo $SPXY$ a soma do produto de X por Y e SQX define a soma de quadrados de X.

Considere os cálculos auxiliares obtidos pela calculadora científica:

$\sum X^2$ =22000; $\sum X$ =300; $\sum XY = 809$; $\sum Y^2 = 52{,}10$; $\sum Y = 17{,}56$; $\bar{X} = 50$ e $\bar{Y} = 2{,}93$.

Daí, o modelo linear ajustado pode ser encontrado como segue:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} Y_i)}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}} = \frac{809 - \frac{300\,.17{,}50}{6}}{22000 - \frac{300^2}{6}} = \frac{-69}{7000} \cong -0{,}009857$$

Já o valore de b é dados por:

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 2{,}93 - (-0{,}009857 \times 50) \cong 3{,}42$$

Dessa forma o modelo ajustado via o método dos quadrados mínimos é:

$$\hat{Y} = 3{,}42 - 0{,}009857.x$$

Solução do item (b):

1) Cálculo do R^2:

1.1) Cálculo da soma de quadrado de Regressão (SQ_{Reg}):

Conforme já calculado no item anterior: $SPXY = -69$ e $SQX = 7000$

$$SQ_{Reg} = \frac{SPXY^2}{SQX} = \frac{(-69)^2}{7000} = \frac{4761}{7000} \cong 0,680143$$

1.2) Cálculo da soma de quadrados total (SQ_{Total}):

Cálculo auxiliar $\sum Y^2 = 52,10$ e $\sum Y = 17,56$

$$SQ_{Total} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y\right)^2}{n} = 52,10 - \frac{(17,56)^2}{6} \cong 0,710733$$

Como o coeficiente de determinação é calculado por

$$R^2 = \frac{SQ_{Reg}}{SQ_{Total}} = \frac{0,680143}{0,710733} \cong 0,956956$$

Ou

$R^2 \cong 95,70\ \%$

Discussão sobre o coeficiente de determinação: o R^2e uma medida simples da qualidade do ajuste do modelo de regressão aos dados. Refere-se à proporção da variação da variável dependente (Y) que é explicada pelo modelo de regressão (no caso simples) ajustado. Trata-se de uma medida adimensional, podendo ser expressa na forma de porcentagem. Quanto mais próximo de 1 ou de 100% (em uma escala de 0 a 100), indica uma boa qualidade do modelo ajustado.

Porém, em casos onde há várias variáveis preditoras, deve-se utilizar o coeficiente de determinação ajustado. De fato, a inclusão de inúmeras variáveis, mesmo que tenham muito pouco poder explicativo sobre a variável dependente, aumentarão o valor do R^2, o que incentiva o uso indiscriminado de varáveis. Assim, essa medida penaliza a inclusão de variáveis regressoras pouco explicativas, valorizando o princípio da parcimônia.

Neste estudo de caso, o valor do coeficiente de determinação, R^2, foi aproximadamente 0,9570, indicando que somente 95,70% da variação da conversão alimentar é explicada pelo modelo de regressão ajustado ou teórico.